Муниципальное автономное общеобразовательное учреждение
«Школа №5»

Методическая разработка

«Программа элективного курса

«Метод координат: прямая и плоскость в пространстве»

с применением технологии смешанного обучения

по модели «ротация станций»

Разработала: Боталова О.Н.,

учитель математики

Березники, 2023

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Современное общество характеризуется стремительным развитием науки и техники, появлением новых информационных технологий и моделей обучения. Вместо традиционной передачи знаний, умений и навыков от учителя к ученику приоритетной цельюстановится развитие способностей ученика самостоятельно ставить учебные цели, проектировать пути их реализации, контролировать и оценивать свои достижения, иначе говоря – формирование умения учиться. Для этого педагогом используются интерактивные формы, методы обучения, современные педагогические технологии. На мой взгляд, одной из перспективных технологий является технология смешанного обучения. В течение последних лет проблема содержания материала по технологии «смешанного обучения» привлекает к себе пристальное внимание учителей, педагогов, психологов и методистов. Большая часть исследований направлена на изучение сущности иклассификации данной технологии, методических приемов. Однако в настоящее время недостаточно готовых заданий, дидактических материалов для работы в технологии «смешанного обучения».

Использование данной технологии возможно на разных уровнях образования, но, по моему мнению, особенно актуально на уровне среднего общего образования, когда учебные предметы изучаются на базовом и углубленном уровнях. Это создает условия для существенной дифференциации содержания обучения старшеклассников с широкими и гибкими возможностями построения школьниками индивидуальных образовательных маршрутов.

Для удовлетворения индивидуальных потребностей обучающихся из части учебного плана, формируемой участниками образовательных отношений, предлагается большой выбор элективных курсов. Разработка программ таких курсов является важной и новой задачей современного школьного математического образования. Все вышесказанное обусловливает **актуальность** данной методической разработки.

На основании научных данных, собственного поиска определена

проблема методической работы: на сегодняшний день недостаточно методического материала, нет готовых разработок, которые включают различные типы задний по «смешанному обучению».

Цель: разработка элективного курса по геометрии для 10-11 класса по теме: «Метод координат: прямая и плоскость в пространстве» с применением технологии «смешанного обучения» по «модели ротация станций».

Для достижения цели были поставлены следующие **задачи:**

1.проанализировать методическую литературу и нормативные документы по методической теме «Технология смешанного обучения по модели «ротация станций» при изучении раздела «Метод координат: прямая и плоскость в пространстве»;

2.определить компоненты методической системы элективного курса: цели, задачи, принципы, условия, средства, метод, формы, содержание, организацию самостоятельной работы;

3.разработать задания для каждой станции по теме «Метод координат: прямая и плоскость в пространстве»; (кейс–задания, интерактивный тренажёр, задания на онлайн-ресурсах, задания проектные);

4.обобщить и систематизировать теоретические основы модели «Ротация станций», описать сущность заданий для каждой станции, их виды, структуру.

На протяжении последних 3-х лет я реализую в 10-11 классах естественно-научного профиля разработанный мной элективный курс «Метод координат: прямая и плоскость в пространстве».

Его содержание соответствует ФГОС СОО и рабочей программе по математике для общеобразовательных школ, реализующих программу профильного обучения учащихся, где одним из важнейших модулей учебного предмета «Математика» является модуль «Геометрия», который, как показывает практика, вызывает наибольшую трудность при прохождении государственной итоговой аттестации в форме ЕГЭ в 11 классе.

Методической базой для написания элективного курса стали УМК авторов Е.В.Потоскуева, Л,И.Звавича, А.В.Погорелова, В.И.Рыжика и Л.С.Атанасяна. Углубленное изучение геометрии рассматривается в учебниках А.А.Алексеева, В.И.Вернера, В.И. Рыжиках [1]. Проведя, сравнительный анализ данных УМК пришла к выводу, что все учебники являются учебниками-задачниками. Решение задач по теме «Прямая и плоскость в пространстве» в данных учебниках предлагается решать классическим способом, который развивает пространственное и логическое воображение, но требует больших временных затрат. В своем элективном курсе я предлагаю решение задач векторно–координатным методом, который основан на знании простых формул, алгоритмов, правил и менее затратен по времени.

Для реализации курса использую технологию «смешанного обучения» в модели «ротация станций». Это позволяет осуществлять непрерывное обучение, расширять учебный материал по теме, повышать мотивацию обучающихся, использовать разные типы информации (вербальные, визуальные и другие), удовлетворять разные потребности обучающихся (работа с учителем, самостоятельная работа), в режиме реального времени отслеживать их успехи.

ГЛАВА 1. Теоретические основы технологии «Смешанного обучения». Модель «Ротация станций»

Федеральный государственный образовательный стандарт. Приказ Министерства образования и науки РФ «Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования», утв. приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 17 декабря 2010 г. № 1897.[5].

Смешанное обучение — это образовательная технология, совмещающая обучение с участием учителя (лицом к лицу) с онлайн-обучением, предполагающая элементы самостоятельного контроля учеником пути, времени, места и темпа обучения, а также интеграцию опыта обучения с учителем и онлайн [4].

Существует несколько моделей смешанного обучения: «перевернутый класс», «ротация станций», «станция лабораторий»[3]. Каждая модель позволяет подбирать материал индивидуально для каждого ученика, варьировать уровень сложности в зависимости от потенциала учеников, их интересов и способностей. Так как разработанный элективный курс реализуется по модели «ротация станций», остановлюсь на основных моментах применения данной модели.

Технические требования модели «ротация станций»: наличие в классе электронных устройств (либо с доступом в интернет, либо объединённых в сеть)[2].

Принципы организации модели «ротация станций» :

1) системность;
2) связь теории с практикой;
3) наглядность;
4) дифференцированность;
5) вариативность.

К основным **функциям** организации модели «ротация станций» относятся:

1.Наличие теоретической части практических заданий (разработаны положения, регламентирующие модели «ротации станций», основывающиеся на документах Министерства образования.

2. Обеспеченность методологическим и мировоззренческим материалом (сюда входят методические рекомендации, задания для контроля самостоятельной работы и т.д.)

3. Воспитательная траектория обучения – возможность планирования, самоконтроля и коррекции собственной деятельности.

4. Наличие необходимой материальной базы (библиотечные фонды, информационные ресурсы, доступ в Интернет и т.д)

В содержание заданий входит теоретический материал, примеры решения задач, контрольно-измерительный материал, кейс-задания, комплексные задачи, нестандартные задачи и др.

Электронные ресурсы, которые можно использовать в работе - Learning, Moodle,Google Classroom, ЭПОС Школа и др.

Обучающиеся делятся на три группы и работают на станциях. Одна группа работает под руководством учителя, другая занимается за компьютерами, третья работает над групповым проектом. Группы перемещаются по станциям. Станции могут меняться в зависимости от количества человек и групп в классе, от количества свободных компьютеров и задумки учителя. Деление учеников на группы может происходить по разным принципам.

<u>Цель работы за компьютером</u> - развитие навыков самостоятельной работы, личной ответственности и самообразования учеников. В онлайн среде ученик может не только изучить новый материал, но и проверить свои знания, улучшить их и развить навыки в изучаемой теме.

<u>Цель работы с учителем</u> – предоставление ученикам эффективной обратной связи, когда можно уточнить все пробелы в своих знаниях в беседе с учителем. При этом учитель можетподсказать качественные ресурсы для устранения непонятых моментов в знаниях ученика.

<u>Цель групповых проектов</u> – применение на практике полученных знаний и навыков, развитие коммуникации и умения отстаивать собственную позицию и получение обратной связь от одноклассников.

Работа с проектами (кейсами) способствует проявлению творческой деятельности, критического мышления и эффективной групповой работы .

Важным при организации станций является подбор учителем заданий разного уровня. Учащийся сам выбирает задание нужного уровня. Указанные задания направлены на отработку базовых понятий, формул по данной теме и умение оперировать ими, проверяют знания формулировок и понимания смысла определений, свойств, признаков. Имеются задания, где надо проиллюстрировать и пояснить ответ.

ГЛАВА 2. Программа элективного курса «Метод координат: прямая и плоскость в пространстве»

Большую роль в развитии геометрии сыграло применение алгебры к изучению свойств геометрических фигур, разросшееся в самостоятельную науку — аналитическую геометрию. Возникновение аналитической геометрии связано с открытием метода координат. Метод координат — эффективный и универсальный способ нахождения любых углов или расстояний между стереометрическими объектами в пространстве.

Пояснительная записка

Векторный и координатный методы решения задач – очень популярный и эффективный метод в геометрии. Однако его формальное применение может значительно затруднить решение даже самой простой задачи. Координатный метод решения задач на сегодняшний день самый мощный и при правильном подходе позволяет решить многие виды математических, физических, астрономических и технических задач. Кроме того, координатный метод в рамках школьной программы используется достаточно ограниченно и неполно. В данном курсе рассматриваются эффективные приемы использования указанных методов и примеры решения задач.

Данный элективный курс предназначен для выпускников средних общеобразовательных учреждений.

Цель курса: предоставить учащимся возможность освоить векторно-координатный метод решения задач школьного курса геометрии 10-11класса посредством организации учебного процесса, направленного на изучение соответствующей теории по геометрии, методики решения задач. Достаточно простой в применении, метод координат является необходимой составляющей решения задач различного уровня. Использование данного метода, позволяет учащимся значительно упростить и сократить процесс решения задач, что помогает им при дальнейшем изучении как школьного курса математики, так и при изучении математики в высших учебных заведениях. С помощью векторно-координатного метода можно быстро и успешно решать многие стереометрические задачи из ЕГЭ .

В рамках данного элективного курса рассматриваются типовые задачи ЕГЭ, их решение с помощью координатно-векторного метода.

Координатно-векторный метод имеет преимущества перед другими, что не требует сложных построений в проекциях. По той простой причине, что этот метод заключается во введении (привязке к исследуемым фигурам) системы координат, а затем, например, вычислении длин и углов между векторами. Единственный его, пожалуй, недостаток – это требуемый, нередко, большой объем вычислений.

Координатно-векторный метод представлен практически во всех учебниках, но большее внимание ему уделено в задачнике Потоскуева Е.В. иЗвавича Л.И.

Задачи элективного курса:

- обобщить изученный ранее материал о векторах на плоскости, систематизировать сведения о действиях с векторами в пространстве;
- сформировать умения применять координатный и векторный методы к решению задач на нахождение углов между прямыми, прямой и плоскостью, плоскостями в пространстве;
- сформировать умения применять координатный и векторный методы к решению задач на нахождение расстояний от точки до плоскости, между двумя точками, от точки до прямой;
- сформировать устойчивый интерес к математике у учащихся, имеющих к ней склонности; и развить их математические способности;
- сформировать умения решать задачи, отвечающие требованиям для поступающих в вузы, где математика является одним из профилирующих предметов;

-получить конкретные математические знания, необходимыми для применения

в практической деятельности;
- сформировать представления о математике как части общечеловеческой культуры, понимать значимость математики для научного прогресса;
- развивать логическое мышление, обогащать и расширять математический кругозор учащихся.

Требования к уровню усвоения курса:

В результате изучения данного курса учащийся должен владеть следующими компетенциями:
- освоить определённый набор приёмов векторного и координатного методов решения геометрических задач и уметь применять их при решении задач.
- владеть основными принципами математического моделирования, умением выполнять необходимые эскизы к решаемым задачам.
- приводить полные обоснования при решении задач, используя при этом изученные теоретические сведения, необходимую математическуюсимволику.

Ключевые компетенции:

Информационная компетенция

- владеть всеми видами чтения (ознакомительное, просмотровое, поисковое и др.), пользоваться аналитическим и объяснительным чтением.
- работать с основными компонентами учебной литературы (оглавление, вопросы, задания, словарь, приложения, иллюстрации, схемы, таблицы, сноски); извлекать из них нужную информацию.
- уметь критически воспринимать свою и чужую речь, определять способы ее совершенствования, отделять основную информацию от второстепенной.
- анализировать и рецензировать ответы товарищей, давать им оценку.
- уметь самостоятельно делать выводы и обобщения.
- уметь работать в Интернете, находить необходимую информацию.

Учебно-познавательная компетенция

- уметь самостоятельно и мотивированно организовывать свою познавательную деятельность (от постановки цели до получения и оценки результата).

- уметь предвидеть возможные последствия своих действий. Определять проблемы своей деятельности. Находить и устранять причины возникших трудностей.
- владеть навыками организации и участия в коллективной деятельности: определить общую цель и установить средства ее достижения, конструктивно воспринимать иные мнения и идеи, учитывать индивидуальности партнеров по совместной деятельности, объективно определять свой вклад в общий результат.
- исследовать несложные реальные связи и зависимости. Определятьсущностные характеристики изучаемого объекта; самостоятельно выбирать критерии для сравнения, сопоставления, оценки и классификации объектов.

Коммуникативная компетенция

- уметь вести диалог в групповом взаимодействии, следовать этическим нормам и правилам ведения диалога.
- уметь развернуто обосновывать суждения, давать определения. Объяснять изученные положения на самостоятельно подобранных конкретных примерах.

Формы контроля: устный опрос, работа с кейсами,тестовые задания.

Организация учебного процесса.

Программа рассчитана на два полугодия, один час в неделю(всего 34 часа). Она состоит из трех разделов и содержит систему понятий из областей: векторы и координаты в пространстве, углы между прямыми, прямой и плоскостью, плоскостями в пространстве, расстояние от точки до плоскости, от точки до прямой, от прямой до плоскости.

Каждый из разделов состоит из отдельных пунктов, в которых разбираются типовые задачи и задачи более высокого уровня сложности, затем даются задания для самостоятельного решения.

Элективный курс имеет практико-ориентированную направленность.

Формы занятий: работа с учителем, групповой проект, работа за компьютером.

Отработка и закрепление основных умений и навыков осуществляется привыполнении практических заданий. В рамках данного курса предполагается углубленное изучение вопросов, предусмотренных программой основногокурса. Углубление реализуется на базе изучения некоторых тем, учитывающих перспективы создания новых стандартов школьного математического образования в профильной школе. В преподавании данного курса важным является выбор рациональной системы методов и приемов обучения. Учебный процесс ориентирован на рациональное сочетание устных и письменных, онлайн видов работы.

Программа построена с учетом принципов системности, научности, доступности и обеспечивает выполнение обязательных требований государственных стандартов. В (приложении 1) таблица распределения часов элективного курса.

СОДЕРЖАНИЕ ПРОГРАММЫ

I. Векторы и координаты (14 часа).

Понятие вектора. Действия над векторами. Угол между векторами. Координаты вектора. Длина вектора. Скалярное произведение векторов. Понятие базиса в пространстве. Векторы в пространстве. Разложение вектора по трем некомпланарным векторам. Определители. Уравнение плоскости, проходящей через три точки. Нормальный вектор плоскости.

II. Геометрические понятия и соотношения в контексте аналитической геометрии (14 часов).

Взаимное расположение прямых в пространстве. Угол между прямыми в пространстве. Угол между плоскостями. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве. Угол между прямой и плоскостью. Расстояние от точки до плоскости в координатах. Расстояние от точки до прямой.

III. Практикум по решению задач методом координат (6 часов).
Виды заданий представлены в приложении №3

В приложении №2 представлен оценочный результат по освоению программы элективного курса.

Данная программа элективного курса «Метод координат: прямой и плоскости в пространстве» способствует развитию научиться решать задачи на вычисление углов и расстояний в стереометрии с помощью координатно-векторного метода. Достоинство метода координат состоит в том, что его применение избавляет от необходимости прибегать к наглядному представлению сложных пространственных конфигураций. Решение цепочек задач, объединённых общими мотивами, является творческим процессом и воспитывает у учащихся любовь и уважение к красоте геометрических задач.

Работа с такими задачами не только помогает приобрести навыки решения стандартных задач, но и повышает уровень математической культуры и способствует развитию геометрической интуиции, что позволяет решать и нестандартные задачи.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе методической работы представлено следующее:

1) Описана программа элективного курса «Метод координат : прямая и плоскость в пространстве»;

2) Анализ литературы, обобщение и систематизация теоретического материала позволили сделать выводы: выделено определение модели «ротация станций» Clayton Christensen Institute (Институт Клейтона Кристенсена).

3) Указаны виды работы со станциями, деление представлено по следующим основаниям: степени самостоятельности учащихся; степени индивидуализации; дидактическим целям; источнику знаний и методу обучения; цели их применения.

4).В ходе данной работы мной разработаны задания по станциям

Станция «работа за компьютером»: угол между прямой и плоскостью (15 заданий) , расстояние от точки до плоскости (10 заданий).

Станция «работа с учителем» : угол между плоскостями. (5 заданий), угол между прямыми (7 заданий), координаты вершин геометрических фигур (7 заданий).

Станция «групповые проекты», геометрические понятия и соотношения в контексте аналитической геометрии (50 заданий).

Данные задания на каждой станции разного уровня. И ученик при выполнении задания может решать от более простого к сложному и так же учащийся может перейти к более сложным заданиям. На станции «работа за компьютером» ученик может обратиться к подсказкам если у него трудности в решении. Приведенное деление помогает ориентироваться во множестве задач в зависимости от цели конкретного этапа учебного процесса. Материал наглядно представлен в таблице.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Атанасян Л.С.* Аналитическая геометрия. Часть вторая. Аналитическая геометрия в пространстве/ Л.С. Атанасян. – Москва; «Просвещение», 1970. –380с.

2. *Вылегжанина И.В.* Организация и апробация дистанционного обучения// Научно-методический журнал, –№ 4, – 2007. С.18. file:///C:/Users/user/Downloads/metod-evristicheskih-zadach-v-obuchenii-studentov-inostrannomu-yazyku.pdf

3. *Полат Е.С.* Современные педагогические и информационные технологии в системе образования: учебное пособие для студ. вузов / Полат Е.С.; Бухаркина М.Ю. – 2-е изд., стер. – М: Академия, 2008. – 368 с.

4. *Современные технологии обучения.* Методическое пособие по использованию интерактивных методов в обучении. / Под ред. Г.В.Борисовой.– СПб.: «Полиграф–С», 2002. –98с.

5. *Федеральный* государственный образовательный стандарт. Приказ Министерства образования и науки РФ «Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования», утв. приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 17 декабря 2010 г. № 1897. https://www.garant.ru/products/ipo/prime/doc/55070507/

Приложение 1

Таблица тематического распределения часов

Таблица 1

№ п/п	Название темы	Кол-во часов
I. Векторы и координаты		**14**
1,2	Понятие вектора. Действия над векторами. Понятие базиса в пространстве. Векторы в пространстве	
3,4	Координаты вектора. Разложение вектора по трѐм некомпланарным векторам	
5,6	Длина вектора. Угол между векторами. Скалярное произведение векторов	
7	Определители	
8,9	Уравнение плоскости, проходящей через три точки.	
10,11	Уравнение плоскости. Нормальный вектор плоскости	
12,13	Урок-практикум «Решение задач по теме: «Векторы и координаты».	
14	Зачет по теме: «Векторы и координаты».	
II. Геометрические понятия и соотношения в контексте аналитической геометрии		**14**
15,16	Взаимное расположение прямых в пространстве. Угол между прямыми в пространстве	
17,18	Угол между плоскостями	
19,20	Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве. Угол между прямой и плоскостью	
21,22	Расстояние от точки до плоскости в координатах	
23,24	Расстояние между скрещивающимися прямыми	
25,26	Расстояние от точки до прямой	
27,28	Решение комплексных задач	
III. Практикум по решению задач методом координат		**6**
29,30	Задачи об отношениях отрезков	
31-33	Задачи ЕГЭ, решаемые методом координат	
34	Итоговое занятие	
	Всего	**34**

Приложение 2

Контроль и оценка результатов освоения элективного курса

Таблица 2

Результаты обучения	Критерии оценки	Виды контроля
Знать: • многогранники (определение, чертеж, виды, свойства) • определение координат вектора в пространстве • правила действий с векторами в пространстве, скалярное и векторное произведение векторов. • формулы действий с векторами в координатах; • алгоритм решения стереометрической задачи,используя метод координат; ***Уметь:*** • находить сумму и разность векторов, координаты и длину вектора; • строить проекцию вектора на ось, применяя свойства проекции вектора наось; • находить линейнуюзависимость векторов; • уметь раскладывать векторы поединичным векторам; • находить скалярное произведение векторов и угол междуними; • применять векторный метод при решении стереометрических задач; • находить векторное произведение векторов, понимая геометрический ифизический смысл векторногопроизведения векторов; • вычислять координаты вершин многогранников и точек, расположенных на их ребрах и гранях; • делить отрезок в данном отношении; • составлять уравнение прямой иплоскости; • находить расстояния между точками, скрещивающимися прямыми, точкой и плоскостью, угол между прямыми,прямой и плоскостью, междуплоскостями в многогранниках; • находить дополнительный материал по изучаемой теме во всех допустимых средствах информации	«зачет»-«незачет» Обучающийся получает «зачет»: 1) если правильно и обоснованно решено 5 задачи из 10 .на **станции работа с учителем**. 2) если правильно решены 10задач из 30. Задание считается выполненным, если: не использованы подсказки. на **станции онлайн.** 3) если верно решено 70%кейса на **станциипроектная**. **<u>Станция работа с учителем</u> <u>и проектная:</u>** Задание считается выполненным, если : Верно выполнен чертеж, описаны основные теоремы исвойства. Проведены доказательные рассуждения. Правильно подобраны формулы. Правильно выполнены вычисления и получен верный ответ. Задание может быть засчитано если: Верно выполнен чертеж, не описаны основные теоремы и свойства. Правильно подобраныформулы. Правильно выполнены вычисления и полученверный ответ.	Текущий контроль: - устные и письменные, онлайн опросы; - анализ решённых заданий в формате ЕГЭ; - работа с КИМ (в формате ЕГЭ – профильный уровень). **Промежуточнаяаттестация:** - итоговая работа покурсу.

Методические рекомендации проведения занятия на станции «работа с учителем»:

Ключевые моменты занятия:

Занятие проходит в классе.

•. На данной станции группа состоит из 7-10 учащихся. Каждому ученику дается карточка с заданиями, которые они должны выполнить в течение 20 минут.

• Учащиеся работают под контролем педагога, который обсуждает с ними, алгоритм при решении задач.

• Подвести итог по итогам решенных задач.

<u>Задание 1</u>. Координаты вершин геометрических фигур.

Алгоритм применения метода координат к решению геометрических задачсводится к следующему:

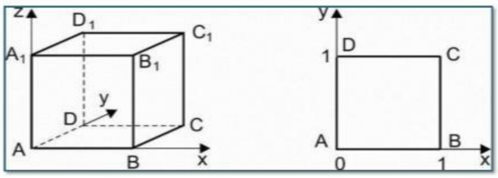
o Выбираем в пространстве систему координат из соображений удобства выражениякоординат и наглядности изображения.

o Находим координаты необходимых для нас точек.

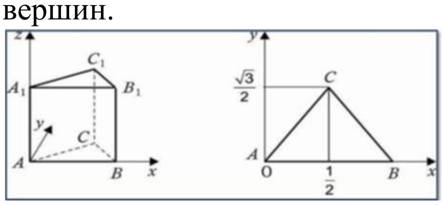
o Решаем задачу, используя основные задачи метода координат.

o Переходим от аналитических соотношений к геометрическим.

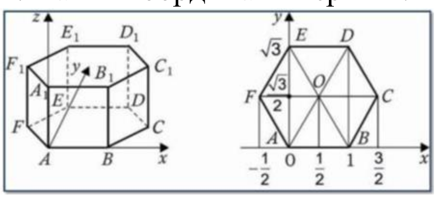
o 1.Единичный куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.Найти координаты вершин.



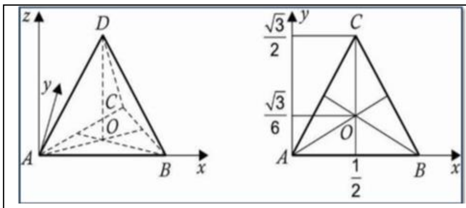
2. Правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, все ребра, которой равны 1. Найтикоординаты вершин.



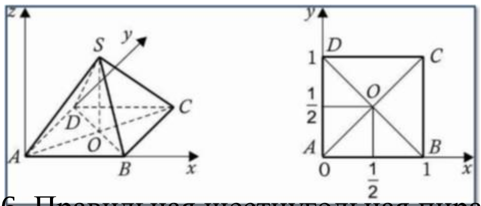
3. Правильная шестиугольная призма $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1. Найти координаты вершин.



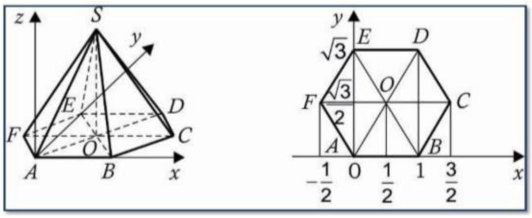
4. Правильная треугольная пирамида (тетраэдр) $ABCD$ все ребра которой равны 1.Найти координаты вершин.



5. Правильная четырехугольная пирамида $ASBCD$, все ребра которой равны 1. Найти координаты вершин.



6. Правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$, стороны основания которой равны1, а боковые ребра равны 2. Найти координаты вершин.



Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ (решено любые 4 задач)	4
Решено 2 задачи, решены все 4 задач но допущены ошибки,	2
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный бал	4

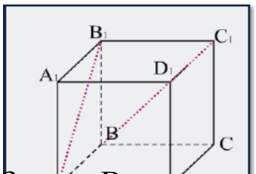
<u>Задание 2.</u> Угол между прямыми.

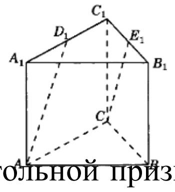
Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ (в любых4 задача)	4
Решено любые 2 задачи, решение содержит обоснованный переход кпланиметрической задаче,но получен неверный ответ или решение не закончено,или при правильном ответе решение недостаточно обосновано	2
Решение не соотвестствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный бал	4

Алгоритм решения задач на нахождение угла между прямыми:

1. На рисунке изображаем указанные в задаче прямые (выделяем направляющиевектора)
2. Вводим систему координат
3. Находим координаты точек
4. Находим координаты векторов
5. Подставляем в формулу "косинус угла между векторами"
6. После чего (если требуется в задаче), зная косинус, находим значение самого угла.

1.Задача. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми AB_1 и BC_1.



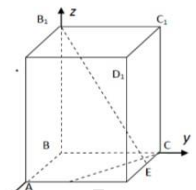
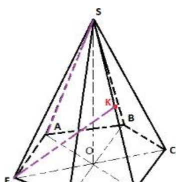


2.Задача.В правильной треугольной призме $ADCA_1B_1C_1$ все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AD_1 и CE_1 где D_1 и E_1 - соответственно середины ребер A_1C_1 и B_1C_1.

3.Задача. Точка O лежит на ребре DD_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка P

Является точкой пересечения диагоналей грани $ABCD$. $DO{:}\,DD_1 = 1{:}\,5$.

Найдите косинус угла между прямой OP и прямой, содержащей диагональ куба, выходящую из вершины C.

Задача. В правильной шестиугольной пирамиде $ABCDEFS$ (S- вершина пирамиды)стороны основания равны 1, а боковые рёбра 2, K- середина ребра SD. Найдите уголмежду прямыми AS и FK. 5. Задача. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми AE и DF, где E и F - точки, расположенные на рёбрах CD и C_1D_1 соответственно так, что $DE = \frac{1}{3}DC$; $C_1F = \frac{1}{3}C_1D_1$

6.Задача. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми FEи PQ, где E, F, P, Q – середины рёбер DD_1, BC, AA_1 и C_1B_1 соответственно.

7.Задача. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AB_1 и C_1B.

Задание 3:

– Учащимся выдаются формулы на бумажном носителе и задания для выполнения. Итоги подводим совместно с учителем.

ФОРМУЛЫ

	ОПРЕДЕЛЕНИЯ (Учебник Л. С. Атанасян «Геометрия 10-11»)	
1	Расстояние между точками	
2	Расстояние от точки допрямой	Расстоянием от точки до прямой, не содержащую данную точку, в пространстве называется длина отрезка перпендикуляра, опущенного из данной точки на прямую
3	Расстояние от точки до плоскости	стр. 41
4	Расстояние между скрещивающимися прямыми	стр. 41
5	Расстояние между прямой и параллельной ей плоскостью	стр. 41
6	Расстояние между двумя параллельными плоскостями	стр. 41
~~7~~	~~Угол между векторами~~	
8	Угол между пересекающимися прямыми в пространстве	стр. 18
9	Угол между скрещивающимися прямыми	стр. 18
10	Угол между плоскостью и не перпендикулярной ейпрямой	стр. 43
11	Угол между плоскостями	стр. 48

$\sqrt{x^2+y^2+z^2}$	Длина вектора $\vec{n}\{x;y;z\}$
$x_1y_1+x_2y_2+z_1z_2$	Скалярное произведение векторов $\vec{n}\{x_1;y_1;z_1\}$ и $\vec{m}\{x_2;y_2;z_2\}$
$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda};y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda};z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$	Если $M_1M : MM_2 = \lambda$, то M(x;y;z)
$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$	Длина отрезка M_1M_2, если $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_1;y_1;z_1)$
$\rho(M,\alpha)=\frac{\lvert ax_0+by_0+cz_0+d\rvert}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$,	Расстояние от точки $M(x_0;y_0;z_0)$ до плоскости ax + by + cz + d = 0
$\cos\alpha=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$,	Косинус угла между векторами $\vec{n}\{x_1;y_1;z_1\},\vec{m}\{x_2;y_2;z_2\}$
$\cos\alpha=\frac{\lvert x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2\rvert}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$,	Косинус угла между прямыми с направляющими векторами $\vec{n}\{x_1;y_1;z_1\},\vec{m}\{x_2;y_2;z_2\}$
$\cos\alpha=\frac{\lvert a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2\rvert}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$,	Косинус угла между плоскостями $a_1x + b_1y + c_1z + d = 0$ и $a_1x + b_1y + c_1z + d = 0$, где векторы $\vec{n}\{a_1;b_1;c_1\},\vec{m}\{a_2;b_2;c_2\}$ - нормали к плоскостям
$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$,	Уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ и $M_2(x_2;y_2;z_2)$ (каноническое уравнение прямой). Вектор $\vec{n}\{x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1\}$- направляющий вектор прямой.
$ax+by+cz+d=0$,	Общее уравнение плоскости, где $\vec{n}\{a;b;c\}$ - вектор нормаль к плоскости
$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$	Уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$ и $M_3(x_3;y_3;z_3)$.
$\sin\alpha=\frac{\lvert am+bn+cp\rvert}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$	Синус угла между прямой и плоскостью, где $\vec{f}\{m;n;p\}$ - направляющий вектор прямой $\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}$, $\vec{q}\{a;b;c\}$ - вектор нормаль к плоскости ax + by + cz + d = 0

Приложение 4

Методические рекомендации проведения занятия на станции «работа за компьютерами»:

Методические рекомендации проведения занятия на станции онлайн:

Ключевые моменты занятия:

• Занятие проходит в учебном кабинете, дети работают на компьютере , группа состоит из 7-10 учащихся.

• Каждому дается банк задач и учащийся решает может обратиться к подсказкам если возникли трудности.

• **Задание 1.** Составить уравнение прямой и плоскости в пространстве (табл. 5).

982 Составить уравнения прямых, образованных пересечением плоскости $5x-7y+2z-3=0$ с координатными плоскостями.

983 Составить уравнения прямой, образованных пересечением плоскости $3x-y-7z+9=0$ с плоскостью, проходящей через ось Ох и точку E(3; 2; -5).

984 Найти точки пересечения прямой $\begin{cases} 2x+y-z-3=0 \\ x+y+z-1=0 \end{cases}$ с координатными плоскостями.

985 Доказать, что прямая $\begin{cases} 2x-3y+5z-6=0 \\ x+5y-7z+10=0 \end{cases}$ пересекает ось Оу.

986 Определить, при каком значении D прямая $\begin{cases} 2x+3y-z+D=0 \\ 3x-2y+2z-6=0 \end{cases}$ пересекает:

986.1 ось Ох;

986.2 ось Оу;

986.3 ось Oz.

987 Найти соотношения, которым должны удовлетворять коэффициенты уравнений прямой $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$ для того, чтобы эта прямая была параллельна:

987.1 оси Ох;

987.2 оси Оу;

987.3 оси Oz.

990 Составить уравнение плоскости, которая проходит через прямую пересечения плоскостей $3x-y+2z+9=0$, $x+z-3=0$:

990.1 и через точку $M_1(4; -2; -3)$;

990.2 параллельно оси Ох;

990.3 параллельно оси Oy;

990.4 параллельно оси Oz.

991 Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую пересечения плоскостей $2x-y+3z-5=0$, $x+2y-z+2=0$ параллельно вектору l={2; -1; -2}.

992 Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую пересечения плоскостей $5x-2y-z-3=0$, $x+3y-2z+5=0$ параллельно вектору l={7; 9; 17}.

993 Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую пересечения плоскостей $3x-2y+z-3=0$, $x-2z=0$ перпендикулярно плоскости $x-2y+z+5=0$.

994 Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\begin{cases} 5x-y-2z-3=0 \\ 3x-2y-5z+2=0 \end{cases}$ перпендикулярно плоскости $x+19y-7z-11=0$.

995 Составить уравнение плоскости, которая проходит через прямую пересечения плоскостей $2x+y-z+1=0$, $x+y+2z+1=0$ параллельно отрезку, ограниченному точками $M_1(2; 5; -3)$, $M_2(3; -2; 2)$.

996 Написать уравнение плоскости, принадлежащей пучку плоскостей $\alpha(3x-4y+z+6)+\beta(2x-3y+z+2)=0$ и равноудаленной от точек $M_1(3; -4; -6)$ и $M_2(1; 2; 2)$.

997 Определить, принадлежит ли плоскость $4x-8y+17z-8=0$ пучку плоскостей $\alpha(5x-y+4z-1)+\beta(2x+2y-3z+2)=0$.

Задание 4 Неполные уравнения плоскостей. Уравнение плоскости "в отрезках".

940	Составить уравнение плоскости, которая проходит:
940.1	через точку *M1(2; -3; 3)* параллельно плоскости *Oxy;*
940.2	через точку *M2(1; -2; 4)* параллельно плоскости *Oxz;*
940.3	через точку *M3(-5; 2; -1)* параллельно плоскости *Oyz.*
941	Составить уравнение плоскости, которая проходит:
941.1	через ось *Ox* и точку *M1(4; -1; 2)*;
941.2	через ось *Oy* и точку *M2(1; 4; -3)*;
941.3	через ось *Oz* и точку *M3(3; -4; 7);*
942	Составить уравнение плоскости, которая проходит:
942.1	через точки *M1(7; 2; -3)* и *M2(5; 6; -4)* параллельно оси *Ox;*
942.2	через точки *P1(2; -1; 1)* и *P2(3; 1; 2)* параллельно оси *Oy*;
942.3	через точки *Q1(3; -2; 5)* и *Q2(2; 3; 1)* параллельно оси *Oz.*
943	Найти точки пересечения плоскостис координатными осями. $2x-3y-4z-24=0$

944	Дано уравнение плоскости $x+2y-3z-6=0$. Написать для нее уравнение в отрезках.
945	Найти отрезки, отсекаемые плоскостью $3x-4y-24z+12=0$ на координатных осях.
949	Плоскость проходит через точки *M1(1; 2; -1)* и *M2(-3; 2; 1)* и отсекает на оси ординат отрезок *b=3*. Составить для этой плоскости уравнение в отрезках.$2x-3y+6z-12=0$
952	Составить уравнение плоскостей, которые проходят через точку *M1(4; 3; 2)* и отсекают на координатных осях отличные от нуля отрезки одинаковой длины.
953	Составить уравнение плоскости, отсекающей на оси *Oz* отрезок *c=-5* и перпендикулярной к ветору *n={-2; 1; 3}*.
954	Составить уравнение плоскости, параллельной вектору *l={2; 1; -1}* и отсекающей на координатных осях *Ox* и *Oy* отрезки *a=2, b=-2.*

Занятие 5.Действие над векторами

748 Вычислить модуль вектора $\bar{a}$={6; 3; -2}.

749 Даны две координаты вектора X=4, Y=-12. Определить его третью координату Z при условии, что $|\bar{a}|$=13.

750 Даны точки A(3; -1; 2), B(-1; 2; 1). Найти координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{BA}$.

751 Определить точку N, с которой совпадает конец вектора ={3; -1; 4}, если его начало совпадает с точкой M(1; 2; -3).

752 Определить начало вектора ={2; -3; -1}, если его конец совпадает с точкой (1; -1; 2).

753 Дан модуль вектора =2 и углы α=45^0, =60^0, γ=120^0. Вычислить проекции вектора на координатные оси.

754 Вычислить направляющие косинусы вектора $\bar{a}$={12; -15; -16}.

755 Вычислить направляющие косинусы вектора $\bar{a}$={3/13; 4/13; 12/13}.

758 Вектор составляет с осями Ox и Oz углы =120^0 и γ=45^0. Какой угол он составляет с осью Oy?

759 Вектор составляет с координатными осями Ox и Oy углы α=60^0, =120^0. Вычислить его координаты при условии, что =2.

760 Определить координаты точки M, если ее радиус-вектор составляет с координатными осями одинаковые углы и его модуль равен 3.

Занятие 6 . Угол между прямой и плоскостью. Расстояние от точки до плоскости

1007 Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_1(2; 0; -3)$ параллельно:

1007.1 вектору a={2; -3; 5};

1007.2 прямой $\frac{x-1}{5}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+1}{-1}$;

1007.3 оси Ox;

1007.4 оси Oy;

1007.5 оси Oz.

1008 Составить канонические уравнения прямой, проходящей через данные точки:

1008.1 (1; -2; 1), (3; 1; -1);

1008.2 (3; -1; 0), (1; 0; -3);

1008.3 (0; -2; 3), (3; -2; 1);

1008.4 (1; 2; -4), (-1; 2; -4).

1009 Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_1(1; -1; -3)$ параллельно:

1009.1 вектору a={2; -3; 4};

1009.2 прямой $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-1}{0}$;

1009.3 прямой $x=3t-1$, $y=-2t+3$, $z=5t+2$.

1010 Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через данные точки:

1010.1 (3; -1; 2), (2; 1; 1);

1010.2 (1; 1; -2), (3; -1; 0);

1010.3 (0; 0; 1), (0; 1; -2).

1011 Через точки $M_1(-6; 6; -5)$, $M_2(12; -6; 1)$ проведена прямая. Определить точки пересечения этой прямой с координатными плоскостями.

1012 Даны вершины треугольника A(3; 6; -7), B(-5; 2; 3), C(4; -7; -2). Составить параметрические уравнения его медианы, проведенной из вершины C.

1013 Даны вершины треугольника A(3; -1; -1), B(1; 2; -7), C(-5; 14; -3). Составить канонические уравнения биссектрисы его внутреннего угла при вершине C.

1014 Даны вершины треугольника A(2; -1; -3), B(5; 2; -7), C(-7; 11; 6). Составить канонические уравнения биссектрисы его внешнего угла при вершине A.

1018 Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_1(2; 3; -5)$ параллельно прямой $3x-y+2z-7=0$, $x+3y-2z+3=0$.

1019.1 $x-2y+3z-4=0$, $3x+2y-5z-4=0$;

1019.2 $5x+y+z=0$, $2x+3y-2z+5=0$;

1019.3 $x-2y+3z+1=0$, $2x+y-4z-8=0$.

1020 Составить параметрические уравнения следующих прямых:

1020.1 $2x+3y-z-4=0$, $3x-5y+2z+1=0$;

1020.2 $x+2y-z-6=0$, $2x-y+z+1=0$.

1021 Доказать параллельность прямых:

1021.1 $\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{1}$ и $x+y-z=0$, $x-y-5z-8=0$;

1021.2 $x=2t+5$, $y=-t+2$, $z=t-7$ и $x+3y+z+2=0$, $x-y-3z-2=0$;

1021.3 $x+y-3z+1=0$, $x-y+z+3=0$ и $x+2y-5z-1=0$, $x-2y+3z-9=0$.

1022 Доказать перпендикулярность прямых:

1022.1 $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{3}$ и $3x+y-5z+1=0$, $2x+3y-8z+3=0$;

1022.2 $x=2t+1$, $y=3t-2$, $z=-6t+1$ и $2x+y-4z+2=0$, $4x-y-5z+4=0$;

1022.3 $x+y-3z-1=0$, $2x-y-9z-2=0$ и $2x+y+2z+5=0$, $2x-2y-z+2=0$.

1023 Найти острый угол между прямыми $\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{\sqrt{2}}$, $\frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+5}{\sqrt{2}}$.

1024 Найти тупой угол между прямыми $x=3t-2$, $y=0$, $z=-t+3$ и $x=2t-1$, $y=0$, $z=t-3$.

1025 Определить косинус угла между прямыми $x-y-4z-5=0$, $2x+y-2z-4=0$ и $x-6y-6z+2=0$, $2x+2y+9z-1=0$.

1026 Доказать, что прямые, заданные параметрическими уравнениями $x=2t-3$, $y=3t-2$, $z=-4t+6$ и $x=t+5$, $y=-4t-1$, $z=t-4$, пересекаются.

1027 Даны прямые $\frac{x+2}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z-1}{4}$, $\frac{x-3}{l}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-7}{2}$; при каком значении l они пересекаются?

1029 Составить уравнения прямой, которая проходит через точку $M_1(-1; 2; -3)$ перпендикулярно к вектору a={6; -2; -3} и пересекает прямую $\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{-5}$.

1030 Составить уравнения прямой, которая проходит через точку M(-4; -5; 3) и пересекает две прямые $\frac{x+1}{3}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-2}{-1}$, $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{-5}$.

Банк задач

817		Даны вершины четырехугольника A(1; -2; 2), B(1; 4; 0), C(-4; 1; 1), D(-5; -5; 3). Доказать, что его диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны.
819		Вычислить косинус угла, образованного векторами $\bar{a}$ ={2; -4; 4} и $\bar{b}$ ={-3; 2; -6}.
820		Даны вершины треугольника A(-1; -2; 4), B(-4; -2; 0), C(3; -2; 1). Определить его внутренний угол при вершине B.
821		Даны вершины треугольника A(3; 2; -3), B(5; 1; -1), C(1; -2; 1). Определить его внешний угол при вершине A.
822		Вычислив внутренние углы треугольника с вершинами A(1; 2; 1), B(3; -1; 7), C(7; 4; -2), убедиться, что этот треугольник равнобедренный.
823		Вектор $\bar{x}$, коллинеарный вектору $\bar{a}$ ={6; -8; -7,5}, образует острый угол с осью Oz. Зная, что $\lvert\bar{x}\rvert$=50, найти его координаты.
857		Даны точки A(1; 2; 0), B(3; 0; -3), C(5; 2; 6). Вычислить площадь треугольника ABC.
858		Даны вершины треугольника A(1; -1; 2), B(5; -6; 2) и C(1; 3; -1). Вычислить длину его высоты, опущенной из вершины B на сторону AC.
859		Вычислить синус угла, образованного векторами $\bar{a}$ ={2; -2; 1}, $\bar{b}$ ={2; 3; 6}.
860		Вектор $\bar{x}$, перпендикулярный к векторам $\bar{a}$ ={4; -2; -3} и $\bar{b}$ ={0; 1; 3}, образует с осью Oy тупой угол. Зная, что $\lvert\bar{x}\rvert$=6, найти его координаты.
733		На оси ординат найти точку, равноудаленную отточек A(1; -3; 7) и B(5; 7; -5).
735		Даны вершины M1(3; 2; -5), M2(1; -4; 3), M3(-3; 0; 1) треугольника. Найти середины его сторон.
736		Даны вершины A(2; -1; 4). B(3; 2; -6), C(-5; 0; 2) треугольника. Вычислить длину его медианы, проведенной из вершины A.
738		Даны две вершины A(2; -3; -5), B(-1; 3; 2) параллелограмма ABCD и точка пересечения его диагоналей E(4; -1; 7). Определить две другие вершины этого параллелограмма.
743		Даны вершины треугольника A(1; 1; -1), B(2; -1; 3), C(-4; 7; 5). Вычислить длину биссектрисы его внутреннего угла при вершине B.
744		Даны вершины треугольника A(1; -1; -3), B(2; 1; -2), C(-5; 2; -6). Вычислить длину биссектрисы его внутреннего угла при вершине A.

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ и файл с решением прикреплен (в любых4 задача)	4

Решено любые 8 задач но без прекрепления файла с решением , решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано, использованы подсказки.	2
Решение не соотвестствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный бал	4

Методические рекомендации проведения занятия на станции «групповые проекты»:

<u>Методические рекомендации проведения занятия на станции групповые проекты</u>**:**

Ключевые моменты занятия:

• Занятие проходит в учебном кабинете. Учащиеся работают самостоятельно, но с периодической помощью педагога.

• На пару выдается текстовый файл, содержащий задания. Работы оформляются также в текстовый файл.

Данные задания можно давать как группам, так и индивидуально учащимся.

<u>**Задание 5**</u> Решить задачу.

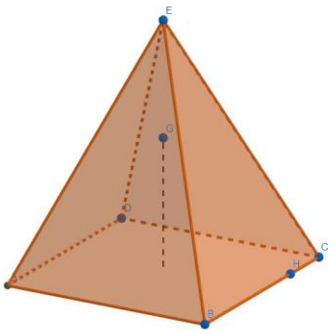
Дано:

ABCDE – правильная четырехугольная пирамида (основание ABCD);

G – середина высоты;

H делит сторону BC, как 3:1;

высота пирамиды равна 5, ребро основания равна 4.



Найти:

1) расстояние между точками *G* и *H*,

2) расстояние от точки *E* до плоскости *(ABC)*,

3) угол между плоскостями *(ABC)* и *(ABE)*,

4) угол между прямыми *DE* и *CE*,

5) угол между прямой *DE* и плоскостью *(ABE)*,

6) расстояние между скрещивающимися прямыми *HG* и *CE*.

Дано:

ABCDE – правильная четырехугольная пирамида (основание ABCD);

G – середина высоты;

H делит сторону BC, как 3:1;

высота пирамиды равна 5, ребро основания равно 4.

Анализ

Для решения данной задачи нам необходимо:

- ввести систему координат;
- определить координаты точек в введенной системе координат;
- найти координаты середины отрезка M_1M_2 по формуле $S\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$, где $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, S – середина отрезка M_1M_2;
- вычислить расстояние между точками по формуле

$$|PQ| = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2 + (z_Q - z_P)^2};$$

- найти уравнение плоскости проходящей через три точки по формуле $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$, где (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) и (x_3, y_3, z_3) – координаты точек плоскости, составить общее уравнение плоскости вида $Ax + By + Cz + D = 0$;
- найти расстояние от точки до плоскости по формуле: $\rho = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, где x_0, y_0, z_0 координаты точки, а уравнение плоскости в общем виде : $Ax + By + Cz + D = 0$, где A, B, C, D – коэффициенты общего уравнения плоскости;
- найти угол между плоскостями, как угол между нормальными векторами этих плоскостей из скалярного произведения векторов по формуле:

$\cos\varphi = \frac{|\vec{n_1}\vec{n_2}|}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$, где $\vec{n_1}\{A_1, B_1, C_1\}$ и $\vec{n_2}\{A_2, B_2, C_2\}$ – вектора нормали плоскостей взятые из общего уравнения плоскости вида $Ax + By + Cz + D = 0$;

- найти угол между прямым, как угол между направляющими векторами этих прямых из скалярного произведения векторов по формуле:

$\cos\alpha = \frac{|\vec{a_1}\vec{a_2}|}{|\vec{a_1}||\vec{a_2}|} = \frac{|x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$, где $\vec{a_1}\{x_1, y_1, z_1\}$ и $\vec{a_2}\{x_2, y_2, z_2\}$ – направляющие вектора этих прямых;

- найти координаты направляющих векторов по формуле, зная координаты точек начала и конца вектора: $\overrightarrow{AB}\{x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A\}$
- найти угол между прямой и плоскостью по формуле:

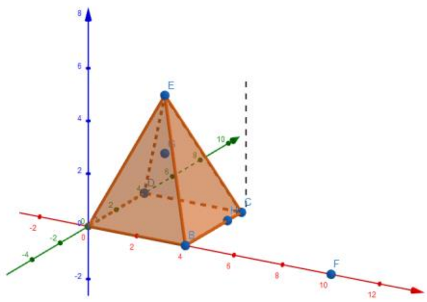
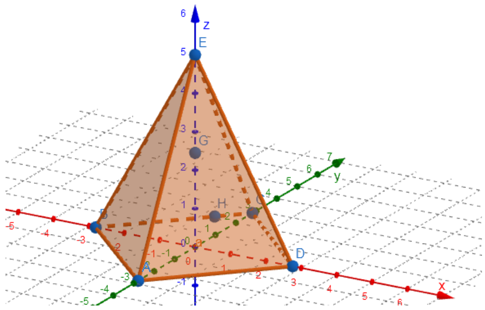
$\sin\gamma = \dfrac{\left|\vec{n}\vec{a}\right|}{\left|\vec{n}\right|\left|\vec{a}\right|} = \dfrac{\left|Ax+By+Cz\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, где $\vec{n}\{A,B,C\}$ – вектор нормали плоскости взятый из общего уравнения плоскости вида $Ax+By+Cz+D=0$ и $\vec{a}\{x,y,z\}$ – направляющий вектор прямой;

- расстояние между скрещивающимися прямыми PQ и CD вычисляется по формуле:

$\left|\overline{PP'}\right| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$, где $P\ (x_1, y_1, z_1)$, $P'\ (x_2, y_2, z_2)$, где точка P' - проекция точки P на плоскость;

- вектор нормали плоскости $\vec{n}$ можно считать направляющим вектором прямой PP'
- найти координаты направляющего вектора прямой PP'.
- составить параметрическое уравнение прямой PP': $\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n} = t$, где t – параметр, (x_1, y_1, z_1), – произвольная точка прямой, $\vec{a}(l; m; n)$ – направляющий вектор прямой;
- найти точку P' - точку пересечения прямой PP' и плоскости.

Решение:

Зададим координатную плоскость с осями, лежащими на	
сторонах основания, центр в точке *A*	диагоналях основания, центр в точке *O*
	
Введем ортогональную систему координат с равными единичными отрезками по *x*, *y*, *z*,	
центр системы поместим в точку *A*, ось *x* направим по ребру *AB*, ось *y* по *AD*, ось *z* параллельно высоте пирамиды. Найдем координаты точек: $O'(2;2;0)$ $A\ (0;0;0)$ $B\ (4;0;0)$ $C\ (4;4;0)$ $D\ (0;4;0)$ $E\ (2;2;5)$ $G\ (2;2;2{,}5)$ (найдем как середину EO' по формуле $G\left(\frac{2+2}{2}, \frac{2+2}{2}, \frac{5+0}{2}\right)$) $H\ (4;3;0)$ (найдем середину BC – $H'\left(\frac{4+4}{2}; \frac{0+4}{2}; \frac{0+0}{2}\right)$ и середину между	центр системы поместим в точку *O* – центр пересечения диагоналей основания, ось *x* направим по диагонали *BD*, ось *y* по – *AC*, ось *z* по высоте пирамиды *OE*. Найдем координаты точек: $O'(0;\ 0;\ 0)$ $A\ (0;\ -2\sqrt{2}\ ;\ 0)$ $B\ (-2\sqrt{2}\ ;\ 0;\ 0)$ $C\ (0;\ 2\sqrt{2}\ ;\ 0)$ $D\ (2\sqrt{2}\ ;\ 0;\ 0)$ $E\ (0;\ 0;\ 5)$ $G\ (0;\ 0;\ 2{,}5)$ (найдем как середину EO' по формуле $G\left(\frac{0+0}{2}, \frac{0+0}{2}, \frac{5+0}{2}\right)$)

<table>
<tr><td>точкой C и серединой ребра BC – $H\left(\frac{4+4}{2};\frac{2+4}{2};\frac{0+0}{2}\right)$)</td><td>$H$ $(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{3\sqrt{2}}{2};$ 0) (найдем середину BC – $H'\left(\frac{-2\sqrt{2}+0}{2};\frac{0+2\sqrt{2}}{2};\frac{0+0}{2}\right)$ и середину между точкой C и серединой ребра BC – $H\left(\frac{-\sqrt{2}+0}{2};\frac{\sqrt{2}+2\sqrt{2}}{2};\frac{0+0}{2}\right)$)</td></tr>
<tr><td colspan="2">1) расстояние между точками G и H,</td></tr>
<tr><td>вычислим расстояние между точками по формуле G (2; 2; 2,5), H (4;3;0):
$|HG|=\sqrt{(x_G-x_H)^2+(y_G-y_H)^2+(z_G-z_H)^2}=$
$=\sqrt{(2-4)^2+(2-3)^2+(2{,}5-0)^2}=\frac{3\sqrt{5}}{2};$</td><td>вычислим расстояние между точками по формуле G (0; 0; 2,5), H $(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{3\sqrt{2}}{2};0)$:
$|HG|=\sqrt{(x_G-x_H)^2+(y_G-y_H)^2+(z_G-z_H)^2}=$
$=\sqrt{\left(0-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)^2+\left(0-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2+(2{,}5-0)^2}=\frac{3\sqrt{5}}{2};$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ответ: расстояние между точками G и H равно $\frac{3\sqrt{5}}{2}$;</td></tr>
<tr><td colspan="2">2) расстояние от точки E до плоскости (ABC),</td></tr>
<tr><td>найдем уравнение плоскости (ABC) проходящей через три точки по формуле
A (0;0;0)
B (4;0;0)
C (4;4;0)
E (2;2;5)
$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 4-0 & 0-0 & 0-0 \\ 4-0 & 4-0 & 0-0 \end{vmatrix}=0,$
$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{vmatrix}=0,$ составим общее уравнение плоскости вида $0x+0y+16z+0=0;$
найдем расстояние от точки E до плоскости (ABC) по формуле: $\rho=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=$
$=\frac{|0\cdot2+0\cdot2+16\cdot5+0|}{\sqrt{0^2+0^2+16^2}}=\frac{16\cdot5}{16}=5.$</td><td>найдем уравнение плоскости (ABC) проходящей через три точки по формуле
A (0; $-2\sqrt{2}$; 0)
B ($-2\sqrt{2}$; 0; 0)
C (0; $2\sqrt{2}$; 0)
E (0; 0; 5)
$\begin{vmatrix} x-0 & y+2\sqrt{2} & z-0 \\ -2\sqrt{2}-0 & 0+2\sqrt{2} & 0-0 \\ 0-0 & 2\sqrt{2}+2\sqrt{2} & 0-0 \end{vmatrix}=0,$
$\begin{vmatrix} x & y+2\sqrt{2} & z \\ -2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 4\sqrt{2} & 0 \end{vmatrix}=0,$ составим общее уравнение плоскости вида $0x+0y-16z+0=0;$
найдем расстояние от точки E до плоскости (ABC) по формуле: $\rho=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=$
$=\frac{|0\cdot0+0\cdot0-16\cdot5+0|}{\sqrt{0^2+0^2+(-16)^2}}=\frac{16\cdot5}{16}=5.$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ответ: расстояние от точки E до плоскости (ABC) равно 5;</td></tr>
<tr><td colspan="2">3) угол между плоскостями (ABC) и (ABE),</td></tr>
<tr><td>уравнение плоскости (ABC) возьмем из предыдущего пункта – $0x+0y+16z+0=0$,</td><td>уравнение плоскости (ABC) возьмем из предыдущего пункта – $0x+0y-16z+0=0$, найдем</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>найдем уравнение плоскости (ABE) проходящей через три точки по формуле
A (0;0;0)
B (4;0;0)
E (2;2;5)
$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 4-0 & 0-0 & 0-0 \\ 2-0 & 2-0 & 5-0 \end{vmatrix}=0$,
$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix}=0$, составим общее уравнение плоскости вида $0x-20y+8z+0=0$;
$\overrightarrow{n_{(ABC)}}\{0;0;16\}$, $\overrightarrow{n_{(ABE)}}\{0;-20;8\}$ – векторы нормали плоскостей (ABC) и (ABE);
найдем угол между плоскостями, как угол между нормальными векторами этих плоскостей из скалярного произведения векторов по формуле:
$\cos\varphi=\frac{\left|\overrightarrow{n_{(ABC)}}\overrightarrow{n_{(ABE)}}\right|}{\left|\overrightarrow{n_{(ABC)}}\right|\left|\overrightarrow{n_{(ABE)}}\right|}=$
$=\frac{|0\cdot 0+0\cdot(-20)+16\cdot 8|}{\sqrt{0^2+0^2+16^2}\sqrt{0^2+(-20)^2+8^2}}=\frac{2\sqrt{29}}{29}$;
(ABC)^(ABE) = $\overrightarrow{n_{(ABC)}}\wedge\overrightarrow{n_{(ABE)}}$ =
$=\arccos\left(\frac{2\sqrt{29}}{29}\right)\approx 68{,}22^\circ$</td>
<td>уравнение плоскости (ABE) проходящей через три точки по формуле
A (0; -$2\sqrt{2}$; 0)
B (-$2\sqrt{2}$; 0; 0)
E (0; 0; 5)
$\begin{vmatrix} x-0 & y+2\sqrt{2} & z-0 \\ -2\sqrt{2}-0 & 0+2\sqrt{2} & 0-0 \\ 0-0 & 0+2\sqrt{2} & 5-0 \end{vmatrix}=0$,
$\begin{vmatrix} x & y+2\sqrt{2} & z \\ -2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{2} & 5 \end{vmatrix}=0$, составим общее уравнение плоскости вида $10\sqrt{2}x+10\sqrt{2}y-8z+40=0$;
$\overrightarrow{n_{(ABC)}}\{0;0;-16\}$, $\overrightarrow{n_{(ABE)}}\{10\sqrt{2};10\sqrt{2};-8\}$ – векторы нормали плоскостей (ABC) и (ABE);
найдем угол между плоскостями, как угол между нормальными векторами этих плоскостей из скалярного произведения векторов по формуле:
$\cos\varphi=\frac{\left|\overrightarrow{n_{(ABC)}}\overrightarrow{n_{(ABE)}}\right|}{\left|\overrightarrow{n_{(ABC)}}\right|\left|\overrightarrow{n_{(ABE)}}\right|}=$
$=\frac{|0\cdot 10\sqrt{2}+0\cdot 10\sqrt{2}+(-16)\cdot(-8)|}{\sqrt{0^2+0^2+(-16)^2}\sqrt{(10\sqrt{2})^2+(10\sqrt{2})^2+(-8)^2}}=$
$=\frac{2}{\sqrt{29}}=\frac{2\sqrt{29}}{29}$;
(ABC)^(ABE) = $\overrightarrow{n_{(ABC)}}\wedge\overrightarrow{n_{(ABE)}}$ = $=\arccos\left(\frac{2\sqrt{29}}{29}\right)\approx$
68,22º</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Ответ: угол между плоскостями (ABC) и (ABE) равен $\arccos\left(\frac{2\sqrt{29}}{29}\right)\approx 68{,}22^\circ$;</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">4) угол между прямыми DE и CE,</td>
</tr>
<tr>
<td>найдем координаты направляющих векторов по формуле, зная координаты точек C (4;4;0), D (0;4;0), E (2;2;5):
$\overrightarrow{DE}\{x_E-x_D,y_E-y_D,z_E-z_D\}$;
$\overrightarrow{DE}\{2-0,2-4,5-0\}$;
$\overrightarrow{DE}\{2;-2;5\}$;
$\overrightarrow{CE}\{x_E-x_C,y_E-y_C,z_E-z_C\}$;
$\overrightarrow{CE}\{2-4,2-4,5-0\}$;
$\overrightarrow{CE}\{-2;-2;5\}$;</td>
<td>найдем координаты направляющих векторов по формуле, зная координаты точек C (0; $2\sqrt{2}$; 0), D ($2\sqrt{2}$; 0; 0),
E (0; 0; 5):
$\overrightarrow{DE}\{x_E-x_D,y_E-y_D,z_E-z_D\}$;
$\overrightarrow{DE}\{0-2\sqrt{2},0-0,5-0\}$;
$\overrightarrow{DE}\{-2\sqrt{2};0;5\}$;
$\overrightarrow{CE}\{x_E-x_C,y_E-y_C,z_E-z_C\}$;
$\overrightarrow{CE}\{0-0,0-2\sqrt{2},5-0\}$;</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td>найдем угол между прямым DE и CE, как угол между направляющими векторами этих прямых из скалярного произведения векторов по формуле:
$\cos\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{DE}\overrightarrow{CE}\right|}{\left|\overrightarrow{DE}\right|\left|\overrightarrow{CE}\right|} =$
$= \frac{\left|2\cdot(-2)+(-2)\cdot(-2)+5\cdot 5\right|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+5^2}\sqrt{(-2)^2+(-2)^2+5^2}} =$
$= \frac{25}{33};$
$\overrightarrow{DE}\wedge\overrightarrow{CE} = DE\wedge CE = \alpha = \arccos\left(\frac{25}{33}\right) \approx$
$\approx 40{,}75^{\circ}$</td>
<td>$\overrightarrow{CE}\{0; -2\sqrt{2}; 5\};$
найдем угол между прямым DE и CE, как угол между направляющими векторами этих прямых из скалярного произведения векторов по формуле:
$\cos\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{DE}\overrightarrow{CE}\right|}{\left|\overrightarrow{DE}\right|\left|\overrightarrow{CE}\right|} =$
$= \frac{\left|(-2\sqrt{2})\cdot 0+0\cdot(-2\sqrt{2})+5\cdot 5\right|}{\sqrt{(-2\sqrt{2})^2+0^2+5^2}\sqrt{0^2+(-2\sqrt{2})^2+5^2}} =$
$= \frac{25}{33};$
$\overrightarrow{DE}\wedge\overrightarrow{CE} = DE\wedge CE = \alpha = \arccos\left(\frac{25}{33}\right) \approx \approx 40{,}75^{\circ}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ответ: угол между прямыми DE и CE равен $\arccos\left(\frac{25}{33}\right) \approx 40{,}75^{\circ}$;</td></tr>
<tr><td colspan="2">5) угол между прямой DE и плоскостью (ABE),</td></tr>
<tr><td>найдем координаты направляющих векторов по формуле, зная координаты точек C (4;4;0), D (0;4;0), E (2;2;5):
$\overrightarrow{DE}\{x_E - x_D, y_E - y_D, z_E - z_D\};$
$\overrightarrow{DE}\{2-0, 2-4, 5-0\};$
$\overrightarrow{DE}\{2; -2; 5\};$
найдем уравнение плоскости (ABE) проходящей через три точки по формуле
A (0;0;0)
B (4;0;0)
E (2;2;5)
$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 4-0 & 0-0 & 0-0 \\ 2-0 & 2-0 & 5-0 \end{vmatrix} = 0,$
$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0,$ составим общее уравнение плоскости вида $0x - 20y + 8z + 0 = 0;$
$\overrightarrow{n_{(ABE)}}\{0;–20;8\}$ – вектор нормали плоскости (ABE);
найдем угол между прямой и плоскостью по формуле:
$\sin\gamma = \frac{\left|\overrightarrow{n_{(ABE)}}\overrightarrow{DE}\right|}{\left|\overrightarrow{n_{(ABE)}}\right|\left|\overrightarrow{DE}\right|} =$</td>
<td>найдем координаты направляющих векторов по формуле, зная координаты точек C (0; $2\sqrt{2}$; 0), D ($2\sqrt{2}$; 0; 0),
E (0; 0; 5):
$\overrightarrow{DE}\{x_E - x_D, y_E - y_D, z_E - z_D\};$
$\overrightarrow{DE}\{0 - 2\sqrt{2}, 0 - 0, 5 - 0\};$
$\overrightarrow{DE}\{-2\sqrt{2}; 0; 5\};$
найдем уравнение плоскости (ABE) проходящей через три точки по формуле
A (0; -$2\sqrt{2}$; 0)
B (-$2\sqrt{2}$; 0; 0)
E (0; 0; 5)
$\begin{vmatrix} x-0 & y+2\sqrt{2} & z-0 \\ -2\sqrt{2}-0 & 0+2\sqrt{2} & 0-0 \\ 0-0 & 0+2\sqrt{2} & 5-0 \end{vmatrix} = 0,$
$\begin{vmatrix} x & y+2\sqrt{2} & z \\ -2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{2} & 5 \end{vmatrix} = 0,$ составим общее уравнение плоскости вида $10\sqrt{2}x + 10\sqrt{2}y - 8z + 40 = 0;$
$\overrightarrow{n_{(ABE)}}\{10\sqrt{2};10\sqrt{2};–8\}$ – вектор нормали плоскости (ABE);
найдем угол между прямой и плоскостью по формуле:</td></tr>
</table>

$=\dfrac{\lvert 0\cdot 2+(-20)\cdot(-2)+8\cdot 5\rvert}{\sqrt{0^2+20^2+8^2}\sqrt{2^2+(-2)^2+5^2}}=$ $=\dfrac{20\sqrt{957}}{957}$; $\overrightarrow{n_{(ABE)}}\wedge\overrightarrow{DE}=(ABE)\wedge DE=\gamma=$ $=\arcsin\left(\dfrac{20\sqrt{957}}{957}\right)\approx 40{,}27°$;	$\sin\gamma=\dfrac{\lvert\overrightarrow{n_{(ABE)}}\overrightarrow{DE}\rvert}{\lvert\overrightarrow{n_{(ABE)}}\rvert\lvert\overrightarrow{DE}\rvert}=$ $=\dfrac{\lvert 10\sqrt{2}\cdot(-2\sqrt{2})+10\sqrt{2}\cdot 0+(-8)\cdot 5\rvert}{\sqrt{0^2+20^2+8^2}\sqrt{2^2+(-2)^2+5^2}}=\dfrac{20}{\sqrt{957}}=$ $=\dfrac{20\sqrt{957}}{957}$; $\overrightarrow{n_{(ABE)}}\wedge\overrightarrow{DE}=(ABE)\wedge DE=\gamma=$ $=\arcsin\left(\dfrac{20\sqrt{957}}{957}\right)\approx 40{,}27°$;
Ответ: угол между прямой *DE* и плоскостью *(ABE)* равен $\arcsin\left(\dfrac{20\sqrt{957}}{957}\right)\approx$ 40,27°;	
6) расстояние между скрещивающимися прямыми *HG* и *CE*.	
найдем уравнение плоскости *(CGE)* проходящей через три точки по формуле *C* (4;4;0) *E* (2;2;5) *G* (2;2;2,5) *H* (4;3;0) $\begin{vmatrix} x-4 & y-4 & z-0 \\ 2-4 & 2-4 & 2{,}5-0 \\ 2-4 & 2-4 & 5-0 \end{vmatrix}=0$, $\begin{vmatrix} x-4 & y-4 & z \\ -2 & -2 & 2{,}5 \\ -2 & -2 & 5 \end{vmatrix}=0$, составим общее уравнение плоскости вида $-5x+5y+0z+0=0$; $\overrightarrow{n_{(CGE)}}\{-5;5;0\}$ – вектор нормали плоскости *(CGE)*; каноническое уравнение прямой HH', проходящей через точку $H(4;3;0)$ с направляющим вектором $\overrightarrow{n_{(CGE)}}\{-5;5;0\}$, имеет вид: $\frac{x-4}{-5}=\frac{y-3}{5}=\frac{z-0}{0}$; составим параметрические уравнения прямой HH': $\frac{x-4}{-5}=\frac{y-3}{5}=\frac{z-0}{0}=t$ $\begin{cases}\frac{x-4}{-5}=t\\ \frac{y-3}{5}=t\\ \frac{z-0}{0}=t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=(-5)\cdot t+4\\ y=5\cdot t+3\\ z=0\cdot t+0\end{cases}$;	найдем уравнение плоскости *(CGE)* проходящей через три точки по формуле *C* (0; $2\sqrt{2}$; 0) *E* (0; 0; 5) *G* (0; 0; 2,5) *H* ($-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$; 0) $\begin{vmatrix} x-0 & y-2\sqrt{2} & z-0 \\ 0-0 & 0-2\sqrt{2} & 2{,}5-0 \\ 0-0 & 0-2\sqrt{2} & 5-0 \end{vmatrix}=0$, $\begin{vmatrix} x & y-2\sqrt{2} & z \\ 0 & -2\sqrt{2} & 2{,}5 \\ 0 & -2\sqrt{2} & 5 \end{vmatrix}=0$, составим общее уравнение плоскости вида $-5\sqrt{2}x+0y+0z+0=0$; $\overrightarrow{n_{(CGE)}}\{-5\sqrt{2};0;0\}$ – вектор нормали плоскости *(CGE)*; каноническое уравнение прямой HH', проходящей через точку *H* ($-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$; 0) с направляющим вектором $\overrightarrow{n_{(CGE)}}\{-5\sqrt{2};0;0\}$, имеет вид: $\dfrac{x+\frac{\sqrt{2}}{2}}{-5\sqrt{2}}=\dfrac{y-\frac{3\sqrt{2}}{2}}{0}=\dfrac{z-0}{0}$;

подставим параметрические уравнения в общее уравнение плоскости (CGE): $-5x+5y+0z+0=0$; $-5\cdot\left((-5)\cdot t+4\right)+5\cdot(5\cdot t+3)=0$ t = 0,1 Полученный параметр t = 0,1 подставим в параметрические уравнения прямой HH': $\begin{cases} x=(-5)\cdot 0{,}1+4 \\ y=5\cdot 0{,}1+3 \\ z=0\cdot 0{,}1+0 \end{cases} \begin{cases} x=3{,}5 \\ y=3{,}5; \\ z=0 \end{cases}$ H' (3,5; 3,5; 0); находим расстояние между скрещивающимися прямыми HG и CE: $\left\|\overline{HH'}\right\|=$ $=\sqrt{(3{,}5-4)^2+(3{,}5-3)^2+(0-0)^2}$ $=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$	составим параметрические уравнения прямой HH': $\frac{x+\frac{\sqrt{2}}{2}}{-5\sqrt{2}}=\frac{y-\frac{3\sqrt{2}}{2}}{0}=\frac{z-0}{0}=t$ $\begin{cases} \frac{x+\frac{\sqrt{2}}{2}}{-5\sqrt{2}}=t \\ \frac{y-\frac{3\sqrt{2}}{2}}{0}=t \\ \frac{z-0}{0}=t \end{cases} \Rightarrow$ $\begin{cases} x=\left(-5\sqrt{2}\right)\cdot t-\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y=0\cdot t+\frac{3\sqrt{2}}{2} \\ z=0\cdot t+0 \end{cases};$ подставим параметрические уравнения в общее уравнение плоскости (CGE): $-5\sqrt{2}x+0y+0z+0=0$; $-5\sqrt{2}\cdot\left(\left(-5\sqrt{2}\right)\cdot t-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+0\cdot\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)=0$ t = -0,1; Полученный параметр t = 0,1 подставим в параметрические уравнения прямой HH': $\begin{cases} x=\left(-5\sqrt{2}\right)\cdot(-0{,}1)-\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y=0\cdot(-0{,}1)+\frac{3\sqrt{2}}{2} \\ z=0\cdot(-0{,}1)+0 \end{cases} \begin{cases} x=0 \\ y=\frac{3\sqrt{2}}{2} \\ z=0 \end{cases}$ H' (0; $\frac{3\sqrt{2}}{2}$; 0); находим расстояние между скрещивающимися прямыми HG и CE: $\left\|\overline{HH'}\right\|=$ $=\sqrt{\left(0-(-\frac{\sqrt{2}}{2})\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2+(0-0)^2}$ $=\frac{\sqrt{2}}{2}$
Ответ: расстояние между скрещивающимися прямыми HG и CE равно $\frac{\sqrt{2}}{2}$	

Задание 6. Даны декартовы координаты четырех точек. A(1; 2; 4), B(0; -2; 7), C(-5; 8; -6),P(-2; 4; -17). Найти:

1) площадь треугольника ABC;

2) длину высоты AH, проведенной из вершины A, в треугольнике ABC;

3) длину медианы BM, проведенной из вершины B, в треугольнике ABC;

4) уравнение медианы BM в треугольнике ABC;

5) направляющие косинусы вектора BC;

6) объем тетраэдра ABCP;

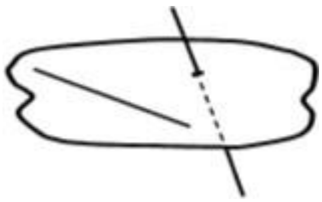
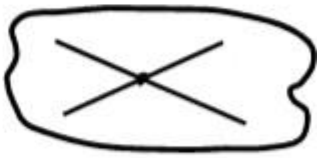
7) уравнение плоскости ABC.

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ (в любых4 заданиях)	4
Решено любые 2 задания, решение содержит обоснованный переход кпланиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано	2
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный бал	4

Задание 7.Параллельные прямые в пространстве

1. В таблице 7 внимательно изучите взаимное расположение прямых в пространстве. Из предложенных вариантов действий подберите к каждому рисунку соответствующие и впишите в свободные ячейки.

Таблица 7 Взаимное расположение прямых в пространстве

		
а)	***а)***	***а)***
б)	***б)***	***б)***
в)	***в)***	***в)***

а) *прямые совпадают; прямые не пересекаются; прямые пересекаются;*

б) *прямые лежат в одной плоскости; прямые не лежат в одной плоскости;*

в) *прямые имеют две общие точки; прямые имеют одну общую точку; не имеют общих точек; прямые имеют бесконечное множество общих точек.*

2. Заполните пропуски в определении параллельных прямых в пространстве, выбрав верный вариант из числа предложенных ниже.

Определение: *Две прямые в пространстве называются параллельными, если* ____

а) они не пересекаются;

б) они лежат в одной плоскости;

в) они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

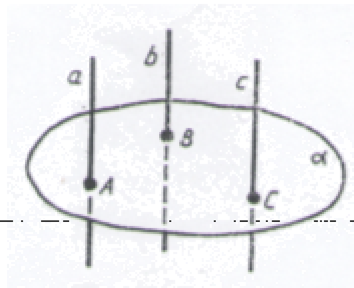
3. Закончите определение скрещивающихся прямых и сделайте рисунок.

Рисунок

Определение: *Скрещивающимися в пространстве называются прямые, которые*

____

____



4. Попарно параллельные прямые ***а, в, с*** пересекают плоскость α в точках ***A, B,*** и ***C,*** как показано на рисунке 9. Лежат ли данные прямые в одной плоскости? Почему?

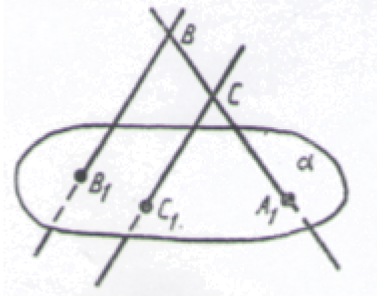
Рисунок 9

Ответ и обоснование: _______________

____

____

5. Прямые BB_1 и CC_1, изображенные на рисунке 10, пересекают прямую A_1B в точках B и C, а плоскость α – в точках B_1 и C_1. Параллельны ли прямые BB_1 и CC_1? Почему?



Ответ и обоснование:

____

Рисунок 10

____

____

6. В пространстве даны прямая и точка не принадлежащая этой прямой. Сколько можно провести через эту точку прямых параллельных данной прямой. *(Выберите верный ответ.)*

а) 1; б) 2; в) ∞; г) 2 или ∞; д) 1 или ∞ ; е) другое.

Ответ: _______________________________

7. Выберите верный ответ и сделайте рисунок.

Если прямые ***а*** и ***в*** лежат в одной плоскости, то они могут:

а) пересекаться и быть скрещивающимися;

б) быть параллельными;

в) быть скрещивающимися и параллельными;

г) быть параллельными и пересекаться;

д)другое.

Рисунок	*Рисунок*

*Ответ:*____

(При выполнении задания 27 для моделирования ситуации используйте подручный материал: карандаши, ручки. Сделайте соответствующие рисунки.)

8. Прямые ***m*** и ***n*** пересекаются. Как расположена прямая ***m*** относительно прямой ***d***, если:

Рисунок

а) ***d*** ‖ ***n***;

*Ответ:*______________________________

(Варианты ответов: ***m*** и ***d*** *– пересекаются, скрещиваются, или являются параллельными).*

б) прямые ***d*** и ***n*** пересекаются?

*Ответ:*______________________________

(Варианты ответов: ***m*** и ***d*** *– пересекаются, скрещиваются, или являются параллельными).*

Рисунок

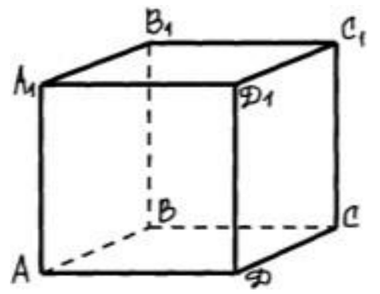


Рисунок 11

9. На рисунке 11 дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

1) Перечислите все прямые, которые:

а) имеют общую точку с прямой DD_1.

*Ответ:*______________________________

б) параллельные прямой ***AD***.

*Ответ:*______________________________

в) являются скрещивающимися с ***DC***.

*Ответ:*______________________________

2) Определите, как расположены прямые, проходящие через ребра куба на рисунке 11, выберите правильный ответ из числа предложенных ниже вариантов:

а) AD_1. и D_1C_1.

*Ответ:*________________________

б) ***BC*** и ***DC***.

*Ответ:*____________________________

в) $\boldsymbol{AA_1}$ и $\boldsymbol{BB_1}$.

*Ответ:*____________________________

(Варианты ответов: пересекаются, скрещиваются, или являются параллельными).

10. Сформулируйте признак параллельности прямых в пространстве, заполнив пропуски по смыслу. Сделайте рисунок и запись с помощью математической символики.

Признак: *Две прямые……………………… третьей прямой ………… ………………………………………………………………………………..*

Рисунок	*Запись*

11. Прямые ***а*** и ***в*** лежат соответственно в плоскостях α и β, которые пересекаются по прямой ***с***. Прямые ***а*** и ***с***, ***в*** и ***с*** – параллельны. Что можно сказать о взаимном расположении прямых ***а*** и ***в***? Сделайте рисунок и запись с помощью математической символики.

(Варианты ответов: прямые ***а*** *и* ***в*** *– пересекаются, скрещиваются или являются параллельными).*

Рисунок	*Запись*

*Ответ:*____

12. Как расположены прямые ***а*** и ***в***, если через прямую ***в*** можно провести две плоскости, параллельные прямой ***а***?

*(Варианты ответов: прямые **а** и **в** – пересекаются, скрещиваются или являются параллельными).*

*Ответ:*____

13. Две параллельные прямые ***а*** и ***в*** соответственно параллельны прямым ***с*** и ***d***. Как расположены прямые ***а*** и ***d***.

*(Варианты ответов: прямые **а** и **d** – пересекаются, скрещиваются или являются параллельными).*

*Ответ:*__________________________________

14. Треугольник ***АВС*** и трапеция ***АВКР*** (***АВ*** – основание трапеции) не лежат в одной плоскости *(рисунок 12).* Как расположены прямые ***РК*** и ***MN***, где ***MN*** – средняя линия треугольника ***АВС***? *(Ответ обоснуйте).*

*Ответ и обоснование:*____________________

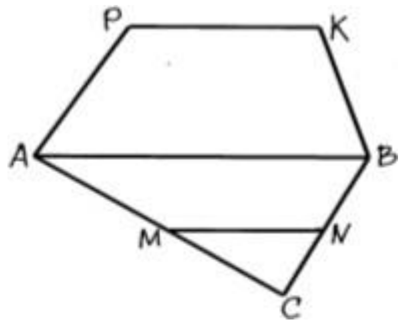


Рисунок 12

____

____

____

____

15. Ромб ***АВСД*** и трапеция ***ВСМК*** (***ВС***- основание трапеции) не лежат в одной плоскости *(смотрите рисунок 13).* Как расположены прямые ***МК*** и ***АД***? *(Заполните пропуски в решении задачи.)*

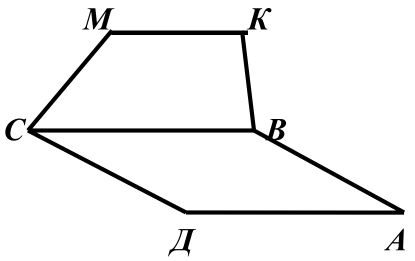


Рисунок 13

Решение:

1) Т.к АВСД- ромб ⇒ АВСД - параллелограмм⇒ АД…ВС

2) Т.к ВСМК – трапеция; ВС –основание ⇒ КМ…ВС

3) Т.к АД…ВС, КМ…ВС ⇒АД…КМ.

Ответ: АД…КМ.

16. На рисунке 14 отрезок ***АВ*** имеет с плоскостью $\boldsymbol{\alpha}$ единственную общую точку ***А***. Через его середину ***С*** и точку ***В*** проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость $\boldsymbol{\alpha}$ соответственно в точках $\boldsymbol{C_1}$ и $\boldsymbol{B_1}$. Длина отрезка $\boldsymbol{AC_1 = 8}$ ***см.*** Найти длину отрезка $\boldsymbol{AB_1}$.

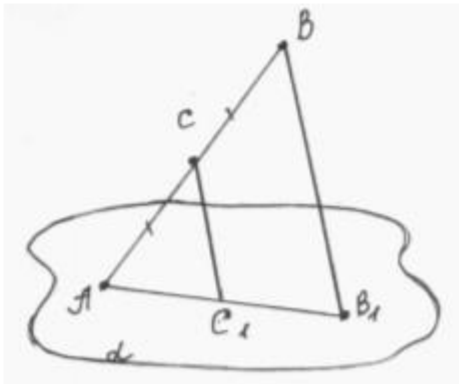


Рисунок14

Дано: $AB \cap \alpha = A$, $C \in AB$, $AC = BC$,

$CC_1 \cap \alpha = C_1$, $BB_1 \cap \alpha = B_1$,

$CC_1 \parallel BB_1$, $AC_1 = 8$ *см.*

Найти: AB_1.

Решение:

____

____

____

____

Ответ: ________________________________

17. *Сделайте рисунок, запишите условие задачи математической символикой и выполните решение этой задачи.*

Точка ***M*** лежит вне плоскости треугольника ***ABC***. Точки ***K,P,E, F***-середины отрезков ***MA, AB,MC,BC***. Как расположены прямые ***KE и PF***?

Рисунок

Дано: ____________________________________

____

Определить взаимное расположение _______

*Решение:*_________________________________

____

____

____

____

Ответ